

La corona de Gerión y el Eureka de Arquímedes

José Antonio Martínez-Pons

Resumen: Basándose en una de las leyendas que se cuentan sobre Arquímedes, se propone un recurso didáctico en el que, partiendo del concepto y la medida de la densidad de sólidos y líquidos, se pretende mostrar, junto con la comprensión de los conceptos básicos, un conjunto de aplicaciones físicas, químicas, incluso matemáticas de la densidad y diferentes modos de medirla, y algunos recursos didácticos que pueden extraerse así como la extensión de las ideas a propiedades similares junto con una introducción a la medida y tratamiento de los resultados.

Palabras clave: Arquímedes, Magnitudes específicas, Densidad. Propiedad característica. Regresión.

Abstract: Departing from one of the legends that are counted on Archimedes a didactic resource is proposed in the one that, starting from the concept and the measure of the density is claimed besides the comprehension of the basic concepts, a set of physical, chemical, even mathematical applications of the density and different manners of measuring it, are shown, and some didactic resources that can be extracted as well as the extension of the ideas to similar properties, as well as an introduction to the measure and the treatment of the results.

Keywords: Archimedes, Specific Magnitudes, Density. Typical property. Regression.

Introducción y un poco de historia

Los antiguos manuales de química elemental solían empezar con una definición de esta ciencia y a renglón seguido exponían que sus objetivos fundamentales eran dos: El análisis, o conjunto de procesos y procedimientos que permitían identificar una sustancia y sus componentes elementales y la síntesis, operaciones y procesos para obtener una determinada sustancia a partir de otras. (Puig)¹ (Vitoria).²

Respecto al análisis, relata Vitruvio que el tirano de Siracusa Gerión o Herón, allá por el siglo III antes de Cristo, encargó a un artesano que le hiciera una corona para cuyo fin le entregó una cierta cantidad de oro. El orfebre concluyó su trabajo pero el tirano sospechó que el artífice había sustituido parte del oro por otro metal de inferior calidad. Pesó la corona y su peso era el correcto, mas el tirano persistió en su duda. Así pues solicitó a Arquímedes de Siracusa (285-212 a J.C.) que, como sabio de la corte, averiguara la verdad sin destruir la corona. Arquímedes en un principio no sabía cómo, pero un día al meterse en la bañera observó que al sumergirse el nivel del agua subía debido al agua que su cuerpo desplazaba y saltó de la pileta exclamando ¡Eureka! (Lo encontré). Había dado con la solución al problema.



J. A. Martínez Pons

Universidad Antonio de Nebrija. C Pirineos 55 Madrid.
C-e: jamartinezpons@educa.madrid.org

Recibido: 06/06/2011. Aceptado: 11/08/2011.

Su idea feliz consistía en tomar una masa de oro puro idéntica a la de la corona. Sumergirla en un recipiente con agua y marcar el nivel alcanzado por el agua, sacar el oro y repetir la operación con la corona. El nivel alcanzado con el oro fue menor que con la corona, lo cual probaba que el material de la corona no era oro ya que un mismo peso desplazaba una cantidad de agua diferente. La sospecha de Gerión era fundada.

Así pues, Arquímedes habría establecido el fundamento del análisis químico, esto es, las sustancias poseen ciertas propiedades, físicas o químicas, que permiten caracterizarlas. Además había introducido en la física la idea de la densidad, por supuesto muy lejos del concepto actual, aunque sabía que a igual masa, dos muestras de la misma sustancia debían desplazar el mismo volumen de agua por tanto ésa era una propiedad característica.

Densidad y peso específico absolutos y relativos

Aunque densidad y peso específico son dos conceptos muy relacionados, son diferentes, pero muchas veces, se confunden, en ocasiones por simple abuso de nomenclatura. La densidad absoluta, de aquí en adelante *densidad*, es la masa de la unidad de volumen.* Es un escalar cuyas dimensiones son $[\rho] = [M][L^{-3}]$ y sus unidades en el S. I. son kg m^{-3} , aunque en la práctica se utilicen unidades más manejables como g cm^{-3} . El peso específico es $[p_e] = \frac{[F]}{[V]} = \frac{[M]}{[L]^2 [T]^2}$ peso de la unidad de volumen, sus dimensiones serían por tanto y su unidad internacional N m^{-3} y conviene recordarlo a los alumnos, aunque el lenguaje corriente no sea muy claro en la distinción. Ambas magnitudes se relacionan por la aceleración de gravedad.

$$p_e = \rho g$$

* Preferimos esta definición a la puramente operativa de “masa partido por volumen” tan corriente, que puede ser útil desde el punto de vista de cálculo pero es muy pobre desde el punto de vista conceptual.

Existe otra magnitud semejante, la “*densidad relativa*”, que compara la masa de un determinado volumen con la del mismo volumen de una sustancia de referencia, generalmente, el agua.[†] La densidad y el peso específico relativos son adimensionales.

La mayoría de medidas se hacen por medio de básculas electrónicas, que miden el peso y no la masa, aunque bien calibradas pueden proporcionar el valor de la masa.[‡] A partir de aquí se considerará que las básculas electrónicas están adecuadamente calibradas y registran masas.

Conceptos relacionados con el término densidad

La idea de cantidad por unidad volumen se extiende a otras magnitudes extensivas, asociándoles una magnitud intensiva, por ejemplo, la *densidad atómica o molecular*, es decir, átomos o moléculas por unidad de volumen, interesante, por ejemplo, en astrofísica, o la *densidad de carga eléctrica*, carga por unidad de volumen, que en el S. I. se mide en coulomb m⁻³ o A·s·m⁻³. Además también es usual cambiar la referencia a la unidad de superficie. Así se habla de *densidad superficial*, por ejemplo el gramaje del papel, o a la unidad de longitud, se llama *densidad lineal*, magnitud importante en el estudio de las vibraciones de una cuerda tensa.

Estos conceptos también son extrapolables a otras magnitudes, como la carga eléctrica y así se tendría la *densidad lineal de carga* de un hilo dieléctrico cargado, cuyo campo creado tradicionalmente suele ser uno de los primeros problemas que se propone a los estudiantes de electromagnetismo, o la *densidad superficial de carga* que aparece, por ejemplo, en el cálculo del campo creado por un plano de cargas. La analogía con la distribución de masa ayuda en la comprensión de las magnitudes electrostáticas.

Como medir la densidad

A lo largo del trabajo que sigue se propondrán diferentes técnicas de medida de la densidad referidas a sólidos y líquidos y el principio físico en que se basan. Es muy importante que, tan pronto como se pueda, los alumnos se acostumbren estimar la incertidumbre de sus resultados, aunque sea de un modo elemental, y que discutan qué factores pueden interferir en éstos.

Medidas cualitativas

La Corona de Gerión

Se trata de reproducir el experimento de Arquímedes. Es suficiente un recipiente transparente, un rotulador, y dos muestras de la misma masa de materiales diferentes. Se sumerge una de ellas en el recipiente, se marca el nivel alcanzado. Se saca la muestra y se introduce la segunda, marcándose el nuevo nivel. Lo normal es que las marcas no coincidan, lógicamente el que desplaza menos volumen, marca inferior, es el más denso. Arquímedes tuvo la suerte de que, en sus tiempos, el material más denso conocido era el oro, de modo que pudo demostrar que la corona y la muestra eran materiales

[†] En enología se suele llamar “masa volúmica” a la densidad absoluta y el término densidad se refiere a densidad relativa respecto al agua, siempre a 20 °C (García Cazorla).³

[‡] Sabido es que cuando dos magnitudes se relacionan mediante una constante, afectos prácticos acaban confundiendo, valga el ejemplo de la masa y la energía en física de partículas ($E = mc^2$).

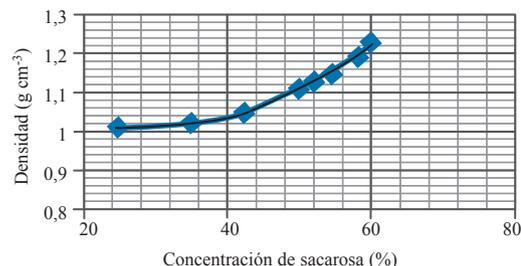


Figura 1. Curva de calibrado con la se calcularía el grado Brix (% equivalente de sacarosa) de una disolución azucarada (Martínez Pons).⁴

diferentes y que la corona no era oro puro. El estudio riguroso de las densidades de las aleaciones está fuera de lugar en este trabajo, ya que depende de la estructura interna de los metales aleados y no tiene que ser rigurosamente proporcional a la proporción de la aleación. Igual puede decirse y observarse, por ejemplo en disoluciones líquidas. Con una adecuada curva de calibrado (Figura 1) cuya construcción es un ejercicio muy interesante, puede calcularse gráficamente la concentración de una disolución, (Martínez Pons)⁴ y verificar, al menos cualitativamente, el efecto de *contracción de volumen*.

Principio de Arquímedes

Como es sabido, según estableció Arquímedes, *todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del fluido que el cuerpo desaloja*, si el empuje es mayor que el peso del cuerpo éste flota y se sumerge en caso contrario.

De modo cualitativo puede utilizarse y de hecho es una técnica industrial corriente, para separar materiales de diferente densidad introduciéndolos en líquidos de densidad conocida, de modo que los flotantes tendrán densidad inferior a la del líquido y los que se hundan, densidad mayor. Aquí se ejemplifica en la separación de muestras de plásticos. Las disoluciones pueden prepararse por ejemplo con mezclas de agua y alcohol ($\rho < 1$) y agua y sal ($\rho > 1$). Si se realiza el experimento téngase la precaución de añadir unas gotitas de detergente al agua y de agitar bien para evitar fenómenos de tensión superficial (Figura 2) (Gómez Antón,⁶ Pérez⁷). Si se prepara un conjunto de disoluciones normalizadas, se puede efectuar una especie de “marcha analítica” con los diferentes plásticos,[§] separando en cada ensayo flotantes y sumergidos e introduciéndolos en sendos líquidos de diferentes densidades intermedias, repitiendo el proceso, si es necesario.



Figura 2. Separación de plásticos en disolución acuosa de densidad 1,2 g cm⁻³ fondo PVC (blanco); superficie PS (rojo).

[§] Recuérdese que no es lo mismo “plástico”, material complejo, que “polímero”, base química de los plásticos, pero la técnica propuesta da bastante buenos resultados incluso con aquéllos.

Medidas cuantitativas

Se debe conocer el fundamento de cada método, sus ventajas y sus inconvenientes, y como se ha dicho, que las medidas se acompañen de una estimación de la incertidumbre y, si se realiza la medida de la densidad de una misma sustancia por diferentes métodos, se comparen los resultados. No se trata de un análisis en profundidad de errores ni de regresión ni otras sutilezas estadísticas, que a juicio de quien esto escribe sobrepasan lo que se puede exigir a un estudiante de bachillerato, pero sí una aproximación adecuada. En cualquier caso, el lector interesado puede consultar la referencia 5. Se pueden realizar dos tipos de medidas. En unas se mide una sola muestra y se calcula la densidad. En otras se mide masa y volumen de una serie de muestras de la misma sustancia y se construye la correspondiente recta. De este modo se verifica que la densidad es una propiedad que no depende de la cantidad de materia, es decir, es intensiva.

Técnicas que se basan en el propio concepto de densidad

Sólidos regulares

En estos casos se medirán las dimensiones características del sólido y se pesará (de aquí en adelante, con abuso de la terminología se utilizará, la voz *pesar* indistintamente para medir masas o pesos). Lo ideal es utilizar un calibre. Se aplicará la fórmula matemática correspondiente y se estimará el error. Se consigue de este modo manejar el calibre. En alumnos de bachillerato se recomienda el método de la derivación logarítmica para la estimación de la incertidumbre⁴ insistiéndose siempre en que el “valor real” es una entelequia, ya que todos los valores son “medidos” con mayor o menor precisión. Por tanto, de lo que se trata es de establecer una cota: “*el error no es mayor que*” o, para ser más rigurosos; “*la incertidumbre en la medida no es mayor que*”. Este apunte vale para todo el trabajo.

Sólidos irregulares

Es este caso se debe medir el volumen por un método indirecto. El más usual es por el volumen de un líquido desplazado. Si se trata de objetos de pequeño tamaño puede utilizarse una probeta y leer directamente el volumen por variación de nivel. El método está limitado por la poca precisión de una probeta de tamaño adecuado y porque, cuando el volumen es pequeño, la imprecisión derivada de su cálculo por diferencia puede ser comparable con la incertidumbre total de las medidas individuales. Además la muestra debe ser más densa e insoluble en el líquido a medir.

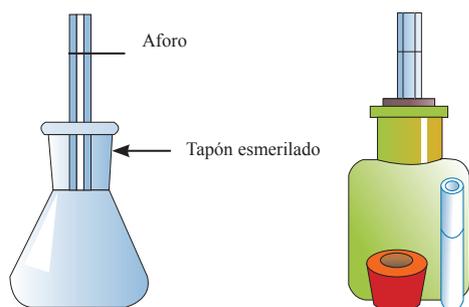


Figura 3. Esquema del picnómetro, y del picnómetro auto construido.

Más preciso es el uso del picnómetro, aparato diseñado expresamente para este objetivo. Se trata de un pequeño matraz con tapón que lleva incorporado un tubo fino con un aforo (Figura 3). Aunque el aparato no es excesivamente caro, puede construirse con un pequeño erlenmeyer o un simple frasco y un tapón de caucho (no de corcho) perforado en el que se ajusta un tubito transparente en el que, con lima o rotulador se marca el aforo. Incluso se puede proponer su construcción a los estudiantes. (Figura 3).

Uso del picnómetro para medir densidades de sólidos.

Pesadas

Primera pesada M_1 = Picnómetro vacío.

Segunda pesada M_2 = Picnómetro con el sólido.

Tercera pesada M_3 = Picnómetro conteniendo el sólido y agua hasta enrase.

Cuarta pesada M_4 = Picnómetro sólo con agua hasta enrase.

La forma más simple de hacer un enrase correcto consiste en hacer un pequeño macarrón con papel de filtro e introducirlo en el cuello del picnómetro absorbiendo el exceso de líquido.

Cálculos

Masa del sólido $M_s = M_2 - M_1$ (puede medirse directamente, con lo que se evita una diferencia).

Masa del agua con sólido $M_5 = M_3 - M_2$.

Masa del agua sin sólido $M_6 = M_4 - M_1$.

Masa de agua desplazada por el sólido $M_d = M_6 - M_5 = M_4 - M_1 - M_3 + M_2 = M_4 - M_3 + M_5$.

Densidad relativa $\rho = M_s / M_d$.

Para calcular la densidad absoluta es suficiente multiplicar por la densidad del agua a la temperatura de trabajo.

$$\rho = d \times \rho_L$$

Obsérvese que, por forma de operar, no es preciso que el material sea menos denso que el líquido del picnómetro y ni una muestra continua (pueden ser, por ejemplo, fragmentos o limaduras).

Ejemplo: Se ha medido la densidad de una cadenita de bisutería obteniéndose $M_s = 5,02$ g; $M_3 = 91,48$ g; $M_4 = 87,11$ g con una incertidumbre en cada pesada de $\pm 0,02$ g.

Entonces $M_d = M_4 - M_1 + M_5$; $\Delta M_d \leq 0,02 + 0,02 + 0,02 = 0,06$ (se han necesitado tres pesadas).

$$\rho = \frac{M_s}{M_d} = 7,72; \frac{\Delta \rho}{\rho} \leq \frac{\Delta M_s}{M_s} + \frac{\Delta M_d}{M_d} = \frac{0,02}{5,02} + \frac{0,06}{65} = 0,096; \Delta \rho = 7,692 \times 0,096 = 0,74$$

Por tanto $\rho = 7,7 \pm 0,7$ y es dimensional al ser una densidad relativa respecto al agua. Pese a su color dorado, sugiere una aleación de hierro.

Aplicación: La medida de la densidad se utiliza en el análisis de plásticos, apoyada por otras, para determinar el polímero constitutivo. En el laboratorio escolar puede emplearse de modo aproximado con muestras de plásticos de uso común, aunque en rigor habría que disolver este plástico en un disolvente adecuado, filtrar para eliminar cargas y otros aditivos, eliminar el disolvente mediante un rota vapor,[†] secar el residuo y analizar éste. Estas técnicas

[†] Este aparato efectúa una destilación a baja presión, no es normal en laboratorios escolares, pero desde 2006 se comercializa para su uso en alta cocina bajo el nombre de “rotavál”.

fuera del alcance de un estudiante de bachillerato que además no es conveniente que manipule disolventes orgánicos. Como ejemplo, se ha medido la densidad de un agitador transparente obteniéndose $\rho = 1,08 \pm 0,02 \text{ g cm}^{-3}$, lo que sugiere un poliestireno.**

Medida de la densidad de líquidos, áridos, limaduras o materiales granulosos

Para medir la densidad de los líquidos es suficiente medir la masa de un volumen determinado y, también aquí, el instrumento más adecuado es el picnómetro. Si solo se desea la densidad relativa, es suficiente tarar el aparato vacío, enrasar con el líquido problema, pesar, cambiar por el líquido de referencia, normalmente agua, y pesar. La relación de ambas masas da la densidad relativa.⁴ Muchos picnómetros vienen calibrados de fábrica con indicación de su volumen hasta el aforo a la temperatura indicada, lo que facilita el trabajo.

Con los materiales granulares se puede distinguir entre la densidad aparente, resultado de medir la densidad de la muestra como si se tratara de un fluido, y la real, en cuyo caso hay que medir el volumen real ocupado por los gránulos. La comparación entre ambas medidas proporciona una estimación de la *porosidad*, porcentaje de huecos, del material.

Medidas de un conjunto de muestras: Mejor recta

En estos casos se trata de medir una serie de muestras de diferente volumen. Una representación masa frente a volumen debe proporcionar una recta que pasa por el origen, cuya pendiente obtenida, ya sea de modo gráfico ya de modo analítico, proporciona la densidad buscada. La experiencia se puede realizar a un nivel muy bajo, simplemente dibujando los puntos e insertando por intuición la mejor recta, insistiéndose siempre en que no se unan los puntos mediante una línea quebrada, y calculando la pendiente gráficamente a partir de dos puntos de esta recta que se evitará que sean puntos experimentales. En niveles más avanzados se pueden dibujar las correspondientes barras de error y hacer el correspondiente análisis de regresión.

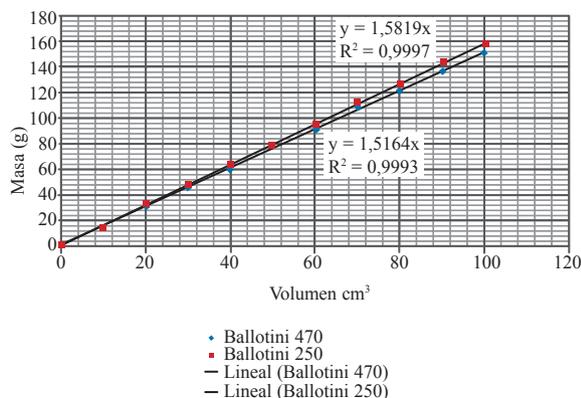


Figura 4. Recta de regresión masa frente a volumen, ajustada a punto fijo (0,0). La pendiente es la densidad aparente de los ballotini, obsérvese la diferente pendiente, mayor para las esférulas de menor radio.

** Habría que completar con otras técnicas, algunas muy simples como ensayo a la llama, pH de los vapores, ensayo de solubilidad.

Si se dispone de hoja de cálculo o de un programa semejante, se puede recurrir a esta herramienta siempre que los alumnos hayan demostrado que son capaces de hacerlo sin la ayuda informática. Deben comprender, por lo menos, la importancia del coeficiente de determinación lineal R^2 (o R) entendiéndolo que un valor próximo a la unidad indica buena correlación lineal y próximo a cero mala, pero no necesariamente independencia, a la par que tener en cuenta que, con pocos puntos, este coeficiente suele dar valores aceptables, aunque se observe claramente que la tendencia de los puntos no es una recta. Como error en la pendiente se puede aceptar el error más probable en la pendiente que proporciona la propia regresión.^{††}

Ejemplos: Se muestran los resultados obtenidos midiendo la densidad aparente de esferillas (“ballotini”) de vidrio, adecuadamente tamizadas para que sus diámetros midan en torno a $470 \mu\text{m}$. Si no se dispone de este material puede utilizarse, por ejemplo, balines esféricos de PVC o torneaduras de aluminio, no se recomiendan perdigones de hierro ni de plomo. Se hicieron 10 medidas desde los 10 hasta los 100 cm^3 obteniéndose una pendiente, que representa la densidad, de $1,516 \pm 0,007 \text{ g cm}^{-3}$ (como valor de incertidumbre se toma el error más probable en la pendiente) y un coeficiente de determinación $R^2 = 0,9998$. Repitiendo la medida con bolitas de $250 \mu\text{m}$ entonces los resultados fueron $\rho = 1,582 \pm 0,006 \text{ g cm}^{-3}$. Midiendo la densidad real con el picnómetro se obtiene $\rho = 2,44 \pm 0,02 \text{ g cm}^{-3}$ y $\rho = 2,44 \pm 0,03 \text{ g cm}^{-3}$ respectivamente, prácticamente el mismo valor, mientras cuanto menor es el tamaño de las partículas, mayor es su densidad aparente Figuras 4 y 5.



Figura 5. Medida de la densidad de los ballotini.

Un análisis más avanzado, con la interpretación de los restantes parámetros que proporcionan los programas de tratamiento de datos, muy interesante al nivel universitario, como un buen entrenamiento al análisis de regresión, parecen fuera de lugar en este trabajo. Para un estudio más profundo puede verse por ejemplo en las referencias 5,6 y 9.

†† Un análisis riguroso de los diferentes parámetros de la regresión pueden encontrarse en cualquier manual por en las referencias 5, 6 y 9.

Densidad lineal y superficial

Densidad lineal

Se puede medir cortando pedazos del cuerpo problema, pesándolos y hallando gráficamente la pendiente de la recta masa frente a longitud. Una aplicación práctica podría ser evaluar la longitud de un ovillo de hilo, midiendo su densidad lineal y pesando el ovillo (Figuras 6 y 7). Se ha medido un alambre de soldar de 1mm de diámetro obteniendo un densidad lineal $\lambda=0,054\pm 0,003 \text{ g cm}^{-1}$.

Un ovillo del mismo, registró una masa de 28,040 g a la que correspondía un longitud $L=m/\lambda=519,17 \text{ cm}$ Estimada la incertidumbre, la longitud fue $L=519\pm 3 \text{ cm}$. La medida directa del hilo fue de $L=519,8 \text{ cm}$. Por vía de comparación se ha medido la densidad lineal de un acero galvanizado de 0,57 mm obteniéndose $\lambda=0,021\pm 0,001 \text{ g cm}^{-1}$.

Densidad superficial

Es el mismo concepto aplicado a una superficie. La metodología más simple consiste en recortar una serie de cuadrados de una misma cartulina, pesarlos y representar primero la masa frente al lado y después la masa frente a la superficie. Los alumnos, a la vista de las figuras, deciden la “mejor” representación. Como es lógico, eligen la segunda y hallan la densidad superficial.

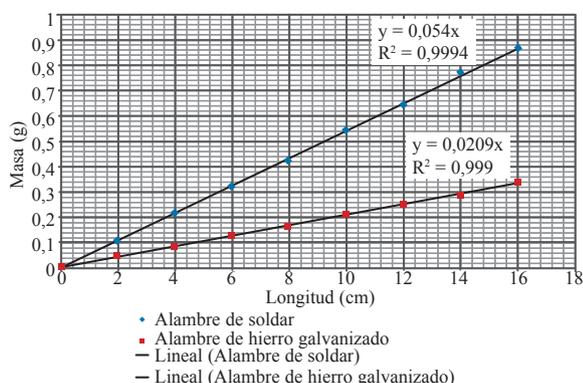


Figura 6. Densidad lineal en g/cm de un hilo de estaño de soldadura y de un alambre de hierro galvanizado.

Una aplicación típica es medir la superficie de un país mediante una balanza. Para ello se recorta un rectángulo del mismo papel en que está dibujado el mapa y se pesa, a continuación se recorta el mapa del país, se pesa, se establece la correspondiente proporción entre ambas masas y superficies y se aplica el factor de escala. El método no es muy preciso, con una incertidumbre intrínseca debida al carácter fractal del perímetro del mapa, pero tampoco se requiere más. En esta línea se propone como aplicación el cálculo aproximado de integrales.

Cálculo de integrales con una balanza

Es corriente confundir el concepto de integral con el de primitiva. No es momento éste de extenderse, pero integral es la medida de un área, en tanto que primitiva de una función es otra función que derivada da la primera. Si se conoce la primitiva de una función, entonces la regla de Barrow permite el cálculo inmediato de la integral entre dos determinadas abscisas. Existen sin embargo muchas funciones

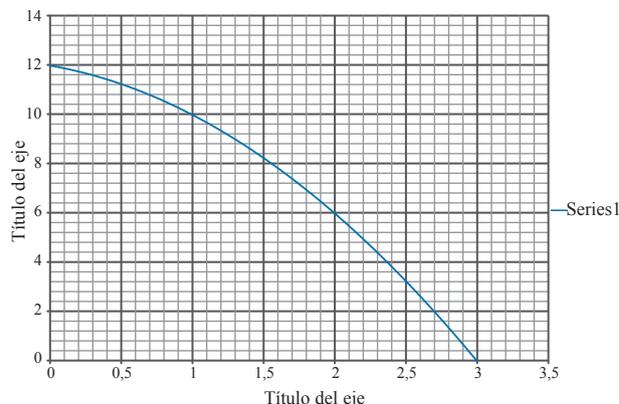


Figura 7. Recinto que se integra.

integrables que carecen de primitiva, en estos caso no puede recurrirse a la regla de Barrow y hay que recurrir al cálculo numérico, por ejemplo métodos de los rectángulos, de los trapecios, de Simpson.⁹

Aquí se propone una aproximación utilizando el concepto de densidad superficial. Para ello se dibujará la región que se desea integrar. Puede usarse la hoja de cálculo. Se recortará el rectángulo en que se incrusta el recinto a integrar y se calculará su área utilizando las unidades en que se ha representado. Se pesará este rectángulo. Se recortará el recinto a integrar, se pesará el recorte y la correspondiente proporcionalidad dará la integral.

Ejemplo: Cálculo de la integral entre 0 y 3 de la parábola $y=-x^2-x+12$, o lo que es lo mismo, el área del recinto limitado por la parábola y los semiejes positivos (Figura 8). Si se integra según la regla de Barrow:

$$\int_0^3 (-x^2 - x + 12) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \Big|_0^3 = -9 - 4,5 + 36 = 22,50u^2$$

El rectángulo tiene un área, corregida la escala, de $3,5 \times 14 = 49 u^2$. Su masa es 2,455 g y su densidad superficial $\lambda=2,455/49=0,050 \text{ g/u}^2$.

Recortado el sector de parábola, su masa es 1,130 g por tanto el área del sector, ya corregida la escala, vale:

$$A=1,130/0,050=22,55 u^2.$$

Como se puede ver, hay una gran concordancia. Si no se dispone de balanzas con precisión del mg es conveniente utilizar un papel más bien grueso. (Figura 8).

Aquí se ha utilizado papel de fotocopia normal.



Figura 8. Pesada del rectángulo y del recinto.

Otros métodos de medida de la densidad no basados en su definición

Empuje arquimediano A

Se requiere un dinamómetro o una balanza hidrostática, muy poco frecuente en los laboratorios escolares.

Las operaciones necesarias son pesar el cuerpo en el aire, peso real P_0 y pesarlo sumergido en un líquido de referencia. Se observará que el registro del dinamómetro, peso aparente, P_a es menor que P_0 . Este peso aparente es igual al peso real menos el empuje.

$$P_a = P_0 - E$$

A su vez el empuje es $E = gV\rho_L$, siendo V el volumen sumergido g la gravedad y ρ_L la densidad del fluido. Si el cuerpo está completamente sumergido el volumen de fluido desalojado es el mismo que el del cuerpo y el empuje es igual a la diferencia entre el peso real y el peso aparente entonces,

$$V = \frac{E}{g\rho_L} = \frac{P_0 - P_a}{g\rho_L}$$

$$\rho_c = \frac{m}{V_c} = \frac{\frac{P_0}{g}}{\frac{P_0 - P_a}{g\rho_L}} = \frac{P_0\rho_L}{P_0 - P_a}$$

Para obtener el peso real se requeriría pesar el cuerpo en el vacío porque el aire es un fluido y ejerce un cierto empuje, pero en general, este empuje se puede despreciar y tomar como peso real el peso en el aire. El principal inconveniente, supuesto que se disponga de un dinamómetro adecuado, es que el sólido debe ser insoluble y más denso que el líquido de referencia.

Empuje arquimediano B

El método anterior se puede modificar de modo que permite utilizar y visualizar de un modo práctico la *tercera ley de Newton*, es decir, *el principio de acción y reacción*. En este caso se precisa simplemente un recipiente con teniendo un líquido de referencia y una balanza electrónica.

Cuando el cuerpo problema se suspende de un hilo y se introduce completamente en el líquido este ejerce sobre el empuje arquimediano, pero en según la 3ª ley el cuerpo ejerce una reacción igual y de sentido contrario sobre el líquido que es precisamente registrada por la báscula. En consecuencia el empuje se lee directamente y la fórmula final del apartado anterior se reduce a $\rho_c = \frac{P_0}{E}\rho_L$, si se desea solo la densidad relativa respecto al líquido de referencia es suficiente con calcular la primera fracción.

Ejemplo: Se ha tomado un tornillo y su tuerca.

$$P_0 = 10,92 \text{ g}; E = 1,48 \text{ g}$$

$$\rho_c = \frac{P_0}{E}\rho_L = \frac{10,92}{1,48} = 7,38 \times 0,98 = 7,2 \pm 0,1 \text{ gcm}^{-3}$$

Con este método no es necesario que el cuerpo sea más denso que el líquido, basta con insertarle una pequeña varilla rígida e introducirlo en el líquido. Como experimento comprobatorio se ha utilizado un cilindro de madera barnizado de 4,5 cm de altura y 2,1 cm de diámetro. La medida geométrica da un volumen de 15,58 cm³ la medida de la masa de agua desalojada es de 15,15 g que corresponde a un volumen de 15,46 cm³.

Aerometría

Uso de un densímetro (o aerómetro) (sc.ehu.es.)¹⁰ que no es sino un cuerpo de masa constante y con una escala graduada de modo que registra el hundimiento del cuerpo en el líquido y con adecuado calibrado permite la lectura directa. Se basa también en el principio de Arquímedes. El principal problema de estos instrumentos, a parte de su fragilidad al estar contruidos con vidrio, es que normalmente operan en un rango muy reducido de densidades. (Muchas veces vienen optimizados para un tipo concreto de líquidos, así los alcoholímetros que ya vienen calibrados para la medida directa del grado alcohólico) Su ventaja es la rapidez de su uso. Puede proponerse a los alumnos que fabriquen uno utilizando un tubito de plástico obtenido de una carcasa de bolígrafo fuera de uso, unos perdigones, un poco de plastilina y una varilla ligera. La mayor dificultad está en calibrarlo adecuadamente, lo que se hará con dos disoluciones patrón, que constituirán los extremos del intervalo de utilidad del aparato (Figura 9). Construir un aparato ayuda a entender su funcionamiento y el que los estudiantes interesados en la ciencia experimental desarrollen una cierta habilidad manual, puede serles de utilidad en un futuro.

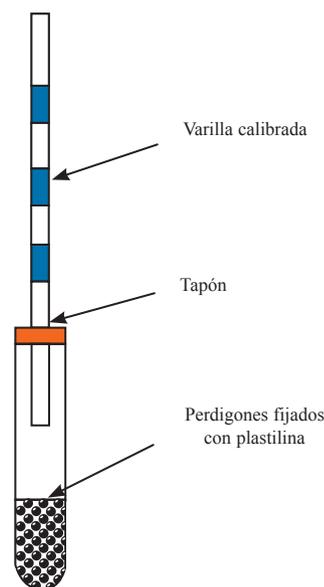


Figura 9. Densímetro artesanal.

Método de los vasos comunicantes

En este método se utiliza el concepto de presión hidrostática.

Si se vierten en un tubo en "U" dos líquidos inmiscibles y se deja que se separen, se distribuirán en los dos brazos de modo que sobre los puntos A y B situados al mismo nivel coincidiendo B con la separación entre ambos líquidos, actúa la misma presión que de acuerdo con las leyes de la hidrostática vale $P_0 + g\rho_1H_1 = P_0 + g\rho_2H_2$ siendo P_0 la presión atmosférica. Operando y reduciendo términos:

$$\rho_2 = \frac{H_1}{H_2}\rho_1$$

Es decir, las alturas de los líquidos son inversamente proporcionales a sus respectivas densidades (Figura 10).

Este método, aunque muy interesante desde el punto de vista didáctico por sus implicaciones con la hidrostática, es poco preciso e implica problemas sobre todo de limpieza del material. Es conveniente, una vez vertidos los líquidos, fijar y equilibrar con la ayuda, por ejemplo, de una plomada el tubo y tomando una cartulina como referencia y un rotulador, marcar los niveles, para medir después con más comodidad. A veces la interfase no queda muy clara, e incluso se forman burbujas en ella que suelen desaparecer con el tiempo. Con las manipulaciones, es posible que se produzca cierta emulsión. Aquí se presenta la medida de la densidad de un aceite de girasol frente al agua. (Altura de la columna de agua: 5,9 cm; altura de la columna de aceite 6,6 cm).

$$\rho_{\text{aceite}} = \frac{5,9}{6,6} \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 0,89 \rho_{\text{H}_2\text{O}}$$

Puede teñirse el agua para distinguir mejor los dos líquidos. En vez de aceite vegetal, puede hacerse con otros líquidos inmiscibles.

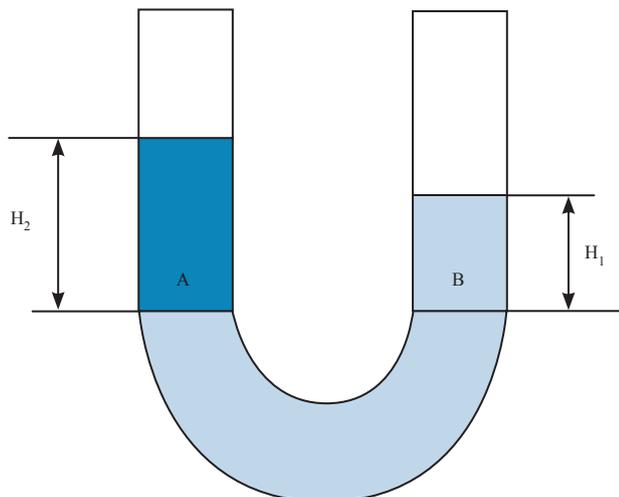


Figura 10. Esquema de medida con unos vasos comunicantes.

Variación de la densidad con la temperatura

Se trata de medir la densidad de una misma sustancia y verificar su dependencia, al menos cualitativa con la temperatura. Operando con el material habitualmente disponible, la reproducibilidad es baja, como en muchos experimentos relacionados con la termología, sobre todo porque los termó-

metros usuales suelen tener bastante inercia térmica y si se trabaja en condiciones de medir con sencillez, la temperatura cambia durante el experimento. Queda ahí pues la idea.

Ejemplo: Variación de la densidad, el agua con la temperatura.

Líquido: Agua corriente T:65 °C masa picnómetro vacío: 41,95 g; Masa picnómetro lleno: 87,19 g Masa agua: 47,19 g Densidad: $0,94 \pm 0,03 \text{ g cm}^{-3}$.

Temperatura: 3,3 °C masa picnómetro vacío: 41,95 g; Masa picnómetro lleno: 91,30 g Masa agua: 49,27 g Densidad $0,98 \pm 0,03 \text{ g cm}^{-3}$.

Conclusiones

La medida de la densidad puede constituir un buen recurso didáctico, tanto para iniciarse en el manejo de técnicas de medida, regresión y cálculo de errores como en el estudio de las propiedades físicas que permiten medir esta magnitud, además de facilitar la comprensión de otras magnitudes específicas, como la densidad de carga.

También para explicar otras aplicaciones que se apoyan en la densidad como técnicas de separación de materiales diferentes, tan importantes en el reciclado de basuras o en la minería y sobre todo recordar que el análisis químico es posible gracias a la existencia de propiedades específicas de las especies químicas y la densidad es una de ellas, por supuesto, no la única, ni la más precisa pero que es, en general, fácil de medir.

Bibliografía

1. I. Puig. *Curso de química general*. 7ª edición. Manuel Marín Editor. 1946, pp 27–28.
2. E. Vitoria. *Manual de química moderna*. Eds. Tip. Cat. Casals. 1944, pp 31–32.
3. J. García Cazorla, M. Girau. *Técnicas usuales de análisis en enología*, Panreac Química S. A. 1995.
4. J. A. Martínez Pons, *An. Quím* 2009, 105 (1), pp 221–226.
5. V. P. Spiridonov, A. A. Lopatkin. *Tratamiento matemático de datos físico químicos*. MIR. Moscú 1973, Caps. I-IV, V y VI.
6. R. Gómez Antón, J. R. Gil Bercero. *Los plásticos y el tratamiento de los residuos*. Aula Abierta UNED 1997, pp 285–28.
7. A. A. Pérez Dorado, *Identificación de plásticos*. 1995, Video UNED.
8. M. R. Spiegel *Probabilidad y estadística. Series Schaum*. McGraw Hill 1976, Cap 8.
9. E.A. Volkov. *Métodos numéricos* MIR Moscú 1980, pp 78–94.
10. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/fluidos/estatica/aerometro/aerometro.htm>

